Roll No. .....

D–3650

B. Sc. (Part II) EXAMINATION, 2020

MATHEMATICS

Paper Third

(Mechanics)

Time : Three Hours] [*Maximum Marks : 50*

नोट : प्रत्येक प्रश्न से कोई **दो** भाग हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Attempt any *two* parts of each question. All questions carry equal marks.

इकाई—1

(UNIT—1)

1. (अ) एक अर्द्ध-गोला समान त्रिज्या के एक गोले पर सन्तुलन में रखा हुआ है। दर्शाइये कि साम्यावस्था अस्थायी है जब गोले पर अर्द्ध-गोले का वक्रपृष्ठ टिका हो और स्थायी है जब अर्द्ध-गोले का सपाट पृष्ठ रखा हुआ हो।

A hemisphere sets in equilibrium on a sphere of equal radius. Show that the equilibrium is unstable when the curved surface of hemisphere rests on the sphere and stable when the flat surface of hemisphere rests on the sphere.

(ब) दो बराबर एकसमान छड़ें AB और AC, प्रत्येक की लम्बाई $2b$ है, A पर स्वतंत्रतापूर्वक जुड़े हुए हैं और त्रिज्या a के एक चिकने ऊर्ध्वाधर वृत्त पर विराम में हैं। दर्शाइये कि यदि उनके बीच का कोण 2θ हो, तो :

$$b\sin^3\theta = a\cos\theta$$

Two equal uniform rods AB and AC, each of length $2b$, are freely joined at A and rest on a smooth vertical circle of radius a. Show that if 2θ be the angle between them, then :

$$b\sin^3\theta = a\cos\theta$$

(स) एक टेलीग्राफ तार 40 गज की दूरी पर स्थित दो खम्भों से लटकाया गया है। यदि झोल 1 फुट हो और प्रति फुट तार का भार आधा औंस हो, तो दर्शाइये कि प्रत्येक खम्भे में क्षैतिज पुल लगभग $\frac{1}{2}cwt$ है।

A telegraph wire is supported by two poles distant 40 yards apart. If the sag be one foot and the weight of the wire be half an ounce per foot, then show that the horizontal pull on each pole is $\frac{1}{2}cwt$ nearly.

इकाई—2

(UNIT—2)

2. (अ) निर्देशांकों और सरल रेखा :

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}$$

पर क्रमशः बराबर बल क्रिया करते हैं। इस बल निकाय के केन्द्रीय अक्ष का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Equal forces act along the co-ordinate axis and along the straight line :

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n}.$$

Find the equation of central axis of the system.

(ब) यदि P तथा Q दो अप्रतिच्छेदी बल हैं जिनकी दिशाएँ लम्बवत् हैं, तो दर्शाइये कि केन्द्रीय अक्ष से उनकी क्रियारेखाओं की दूरियों का अनुपात $Q^2 : P^2$ है।

If P and Q be two non-intersecting forces whose directions are perpendicular, show that the ratio of distances of the central axis from their lines of action is $Q^2 : P^2$.

(स) डायनमे (X, Y, Z, L, M, N) के लिए समतल $x+y+z=0$ की शून्य विक्षेप स्थिति ज्ञात कीजिये।

Find the null point of the plane $x+y+z=0$ for the dyname (X, Y, Z, L, M, N).

इकाई—3

(UNIT—3)

3. (अ) एक कण दो बलों के केन्द्रों, जिनका आकर्षण दूरी का अनुक्रमानुपाती है, के आकर्षण के अन्तर्गत साम्यावस्था में है, उनकी तीव्रताएँ μ, μ' हैं; कण उनमें से किसी एक की ओर अल्पमात्र विस्थापित कर दिया जाता है। दर्शाइये कि एक अल्प दोलन का समय $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu+\mu'}}$ है।

A particle rests in equilibrium under the attraction of two centres of forces which attract directly as the distance, their intensity being μ, μ'; the particle is slightly displaced towards one of them. Show that the time of a small oscillation is $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu + \mu'}}$.

(ब) एक कण P अचर वेग से एक वक्र बनाता है तथा किसी नियत बिन्दु O के सापेक्ष इसका कोणीय वेग इसकी O से दूरी के व्युत्क्रमानुपाती है। सिद्ध कीजिये कि वक्र एकसमान कोणिक सर्पिल है।

A particle P describes a curve with constant velocity and its angular velocity about a given fixed point O varies inversely as its distance from O. Show that the curve is an equiangular spiral.

(स) एक कण केन्द्रीय त्वरण $\mu\left(r + \frac{a^4}{r^3}\right)$ से दूरी a से आरात से वेग $2\sqrt{\mu}\, a$ से गति करता है। दर्शाइये कि इसके द्वारा निर्मित पथ है :

$$r^2\left(2 + \cos\sqrt{3}\,\theta\right) = 3a^2$$

A particle moves with a central acceleration $\mu\left(r + \frac{a^4}{r^3}\right)$ being projected from an apse at a distance a with velocity $2\sqrt{\mu}\, a$. Prove that it describes the curve :

$$r^2\left(2 + \cos\sqrt{3}\,\theta\right) = 3a^2$$

इकाई—4
(UNIT—4)

4. (अ) सूर्य की परिक्रमा करने वाले किसी ग्रह का महत्तम तथा न्यूनतम वेग क्रमशः 30 और 29.2 किमी. प्रति सेकण्ड है। उसकी कक्षा की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

The maximum and minimum velocities of a planet revolving around the sun are 30 and 29.2 km/sec, respectively. Find the eccentricity of its orbit.

(ब) एक कण एक समतल वक्र पर गतिमान है। यदि स्पर्श रेखीय और अभिलाम्बिक त्वरण सदैव अचर रहते हैं, तो सिद्ध कीजिये कि कोण ψ जो गति की दिशा समय t में घूमती है, समीकरण $\psi = A\log(1 + Bt)$ द्वारा निर्धारित होता है।

A particle is describing a plane curve. If the tangential and normal accelerations are each constant throughout the motion, prove that the angle ψ, through which the direction of motion turns in time t is given by :

$$\psi = A\log(1 + Bt).$$

(स) एक रूक्ष चक्रजीय चाप का आधार क्षैतिज तथा इसका शीर्ष नीचे है। माला का एक दाना इसके अनुदिश फिसलता है, यह कस्प से विराम से गति प्रारम्भ करता है तथा शीर्ष पर विराम में पहुँचता है। दर्शाइये कि $\mu^2 e^{\mu\pi} = 1$, जहाँ μ घर्षण गुणांक है।

The base of a rough cycloidal arc is horizontal and its vertex downwards; a bead slides along its, starting from rest at the cusp and coming to rest at the vertex. Show that $\mu^2 e^{\mu\pi} = 1$, where μ is the coefficient of friction.

इकाई—5

(UNIT—5)

5. (अ) गुरुत्वीय आकर्षण में m संहति का एक कण ऊर्ध्वाधरतः ऊपर की ओर प्रक्षेपित किया जाता है। वायु का अवरोध वेग का mk गुना है। यदि V सीमान्त वेग तथा λV प्रारम्भिक वेग है, तो दर्शाइये कि कण द्वारा प्राप्त महत्तम ऊँचाई $\frac{V^2}{g}[\lambda - \log(1+\lambda)]$ है।

A particle of mass m is projected vertically under gravity, the resistance of the air being mk times the velocity. Show that the greatest height attained by the particle is :

$$\frac{V^2}{g}[\lambda - \log(1+\lambda)]$$

where V is the terminal velocity of the particle and λV is the initial velocity.

(ब) एक कण, जो एक अवरोधी माध्यम में गति कर रहा है, पर एक केन्द्रीय बल $\frac{\mu}{r^n}$ क्रिया कर रहा है। यदि पथ कोण α का एक समकोणिक सर्पिल, जिसका ध्रुव बल के केन्द्र पर है, तो दर्शाइये कि अवरोध $\frac{n-3}{2} \cdot \frac{\mu \cos\alpha}{r^n}$ है।

A particle moving in a resisting medium is acted upon by a central force $\frac{\mu}{r^n}$. If the path be an equiangular spiral of angle α, whose pole is at the centre of force, show that the resistance is :

$$\frac{n-3}{2} \cdot \frac{\mu \cos\alpha}{r^n} .$$

(स) एक अर्द्धगोले जिसकी अक्ष ऊर्ध्वाधर है तथा शीर्ष नीचे की ओर है, के आन्तरिक चिकनी पृष्ठ के अनुदिश एक कण क्षैतिजतः प्रक्षिप्त किया गया है। प्रक्षेप बिन्दु निम्नतम बिन्दु से कोणीय दूरी β पर है; दर्शाइये कि प्रारम्भिक वेग, जिससे कि कण अर्द्धगोले के ठीक किनारे तक चढ़ सके, $\sqrt{2\,a\,g\sec\beta}$ है।

A particle is projected horizontally along the interior surface of a smooth hemisphere whose axis is vertical and whose vertex is downwards; the point of projection being at an angular distance β from the lowest point; show that the initial velocity so that the particle may just ascend to the rim of the hemisphere is $\sqrt{2\,a\,g\sec\beta}$.